УДК 519.53 + 517.987

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ И МНОГОУГОЛЬНИКИ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СРЕДНЕГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИНДЕКСА

В.А. Романов

В просторах компактів з деякими додатковими умовами введені тунельна, різницева та мережева топології, а також введені поняття периметричного, радіусного та середньо геометричного індексів компакта.
Досліджено, в яких з цих топологій є неперервними геометричні функціонали, а також досліджено такі опуклі многокутники, які є екстремальними елементами для середньо геометричного індекса.

In spaces of compacts with some additional conditions it are introduced the tunnel, difference and net topologies and also it are introduced the notions of the perimeter, radius and geometrical mean indexes of compact. It are investigated for what of these topologies the geometrical functionals are continuous and also it are investigated such convex polygons that are extreme elements of geometrical mean index.

Введение. Известно, что для многих сложных систем важное значение имеют функционалы площади, длины и максимального радиуса тех кругов, шаров или дисков, которые можно поместить в структурные элементы системы. Например, капилляры человека при общей площади их поверхности 65 тысяч м^2 и общей длине 100 тысяч км должны обеспечивать прохождение эритроцитов, имеющих форму двояковогнутых дисков диаметром 7,5 мкм. Поэтому представляет интерес вопрос о том, приведут ли малые изменения системы обязательно к малым изменениям значений функционалов, то есть будет ли иметь место их непрерывность.

Постановка задачи. Пусть X – пространство непустых компактов на плоскости, представляющих собой замыкания односвязных областей с кусочно-гладким класса C^2 контуром, У – его подпространство, состоящее из компактов с дополнительным условием их выпуклости.

Определение 1. *Туннельным расстоянием* между двумя компактами назовём минимум расстояний между парами точек, взятыми по одной в каждом, *разностным расстоянием* – площадь их симметрической разности, *сетевым расстоянием* – минимум таких положительных чисел t, для которых каждый из компактов служит t-сетью другого.

Определение 2. *Периметрическим* и *радиусным индексами* компакта A назовём соответственно частные от деления его периметра и максимального радиуса содержащегося в A круга на квадратный корень из площади компакта, а *среднегеометрическим индексом* – среднее геометрическое периметрического и радиусного индексов.

Замечание 1. Определение туннельного расстояния сводится к общепринятому расстоянию между множествами [1,с.65]. Для туннельного расстояния не выполняется аксиома треугольника, но для его сужения на дизъюнктную систему компактов выполняются другие аксиомы метрики, в том числе аксиома симметричности. Такая функция двух аргументов называется *симметрикой* [2]. Нетрудно проверить, что для разностного и сетевого расстояний аксиома треугольника выполняется.

Выбор конкретного расстояния зависит от вида системы. При прокладывании туннелей лучше других подойдёт туннельное расстояние, при сравнении ареалов обитания разных биологических видов – разностное, при исследовании транспортных и капиллярных сетей – сетевое.

Каждое из расстояний порождает топологию с соответствующим названием.

Замечание 2. Ясно, что на круге периметрический индекс принимает своё наименьшее, а радиусный – своё наибольшее значение. Все три введённых индекса инвариантны относительно гомотетий и наряду с площадью, периметром и максимальным радиусом содержащегося круга служат примерами геометрических функционалов.

Цель статьи состоит в исследовании непрерывности упомянутых функционалов в туннельной, разностной и сетевой топологиях, а также в описании тех выпуклых многоугольников, на которых среднегеометрический индекс достигает экстремума.

Результаты работы.

Теорема 1. *Относительно туннельной топологии функционалы площади, периметра и максимального радиуса содержащегося круга разрывны в пространстве У, а потому и в более широком пространстве Х.*

Доказательство. Пусть А – единичный квадрат, В – квадрат со стороной 2, отстоящий от А на малом туннельном расстоянии. Тогда А и В мало отличаются в туннельной топологии, но отличия всех трёх рассматриваемых функционалов на множествах А и В значительны, откуда следует их разрывность в пространстве У. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Относительно разностной топологии функционал площади непрерывен в пространстве Х (потому и в более узком пространстве У), а функционалы периметра и максимального радиуса содержащегося круга непрерывны в У, но разрывны в Х.*

Доказательство. Поскольку модуль разности площадей двух множеств не превосходит площади их симметрической разности, то отсюда следует непрерывность функционала площади.

Пусть теперь А – элемент пространства У, С – его контур. Поскольку А можно сколь угодно точно аппроксимировать элементом, имеющим контур 2-го класса гладкости, то без ограничения общности можно считать, что уже сам контур С входит в этот класс.

Пусть t – такое положительное число, которое меньше половины максимального радиуса содержащегося в А круга и которое меньше радиусов всех соприкасающихся с контуром С окружностей.

Зададим число d_1 как четвертую часть площади круга радиуса t/5.

Покроем контур С конечным числом кругов $E_к$ радиуса t/5 и с центрами, принадлежащими этому контуру. Площадь пересечения множества А с каждым из кругов $E_к$ заведомо больше числа d_1.

Пусть теперь В – такой элемент пространства У, для которого площадь его симметрической разности с множеством А меньше числа d_1. Тогда никакое из пересечений А и $E_к$ не может входить в дополнение множества В, а потому в каждом таком пересечении найдется некоторая точка $b_к$ множества В.

Из выпуклости множества B следует, что замкнутая ломаная, звенья которой соединяют все соседние точки b_k, содержится в этом множестве.

Поскольку длина каждого звена ломаной заведомо меньше удвоенного диаметра кругов $E_к$ и поскольку концы звена попадают в обычную t/5-окрестность контура C, то вся ломаная содержится в обычной t-окрестности контура C. Следовательно, внутренний контур этой t-окрестности, который обозначим через C(-t), охватывается ломаной, а потому ограниченная этим внутренним контуром фигура содержится в множестве B и, таким образом, вместе с контуром C(-t) охватывается контуром множества B.

Внешний контур упомянутой t-окрестности контура C обозначим через C(t). Для каждой точки x этого внешнего контура рассмотрим фигуру, ограниченную двумя касательными к контуру C(-t), проведёнными из точки x, и контуром C. Площадь каждой такой фигуры положительна. Из компактности наших множеств следует, что площадь таких фигур достигает своего минимума, который тоже положителен и который обозначим через d_2.

Пусть число d есть меньшее из чисел d_1, d_2 и пусть площадь симметрической разности множеств B и A меньше этого числа.

Тогда никакая точка x контура C(t) не может принадлежать выпуклому множеству B, так как иначе симметрическая разность множеств B и A содержала бы фигуру рассмотренного вида с площадью, которая не меньше числа d_2.

Таким образом, контур множества B охватывается контуром C(t), а контур C(-t) охватывается контуром множества B. Отсюда следует, что модуль разности периметров множеств B и A не превосходит разности длин контуров C(t) и C(-t), а потому имеет нулевой предел при стремлении t к нулю.

Отсюда также следует, что модуль разности максимальных радиусов содержащихся в множествах B и A кругов тоже имеет нулевой предел.

Следовательно, функционалы периметра и максимального радиуса содержащегося круга непрерывны в пространстве У.

Рассмотрим теперь квадрат E со стороной 1 как элемент пространства X. Начиная от середины его верхней стороны, вырежем из E вертикальную прямоугольную полосу малой ширины d и длиной ½. Тогда площадь симметричной разности нового множества и первоначального множества E меньше числа d, а значения на этих множествах функционалов периметра и максимального радиуса содержащегося круга отличаются значительно. Отсюда следует разрывность указанных функционалов в пространстве X. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Относительно сетевой топологии функционалы площади, периметра и максимального радиуса содержащегося круга непрерывны в пространстве У, но разрывны в пространстве X.*

Доказательство. Пусть A – элемент пространства У, C – его контур.

Пусть t – положительное число, которое меньше половины радиуса содержащегося в множестве A круга.

Покроем контур C конечным числом кругов $E_к$ радиуса t/5 и с центрами, принадлежащими этому контуру.

Пусть теперь B – элемент пространства У, входящий в сетевую t/5-окрестность элемента A. Тогда в каждом из кругов $E_к$ найдётся некоторая точка множества B. Ломаная с вершинами в этих точках будет содержаться в выпуклом множестве B, а внутренний контур C(-t) обычной t-окрестности контура C, как и в доказательстве теоремы 2, охватывается ломаной, а потому охватывается и контуром множества B.

Поскольку сетевое расстояние между множествами A и B меньше t/5, то множество B заведомо содержится в обычной t-окрестности множества A, а потому контур множества B будет охватываться внешним контуром C(t) этой t-окрестности. Итак, контур множества B будет находиться между внутренним контуром C(-t) и внешним контуром C(t) обычной t-окрестности контура C множества A. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2, следует непрерывность рассматриваемых функционалов в пространстве У.

Рассмотрим теперь квадрат Е со стороной 1 как элемент пространства X. Начиная от его верхней стороны, вырежем из квадрата n узких вертикальных прямоугольных полос ширины 1/2n (для каждой) и длиной ½ (снова для каждой). Тогда сетевое расстояние между новым множеством B_n и первоначальным квадратом Е стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Вместе с тем для каждого из трёх рассматриваемых функционалов его значения на множествах Е и B_n отличаются значительно, откуда следует разрывность в пространстве X. Теорема 3 доказана.

Из теорем 2 и 3 получаем

Следствие 1. *Относительно разностной и сетевой топологий периметрический, радиусный и среднегеометрический индексы суть непрерывные функционалы в пространстве У.*

Замечание 3. Легко проверить, что в том же пространстве У (а потому и в более широком пространстве X) эти три индексных функционала разрывны относительно туннельной топологии и что в пространстве X они разрывны и относительно разностной и сетевой топологий.

Теорема 4. *Множество значений среднегеометрического индекса на элементах пространства У совпадает с полуинтервалом (1, $\sqrt{2}$], причём для каждого выпуклого многоугольника его принадлежность к экстремальным элементам этого индекса равносильна существованию вписанной в него окружности.*

Доказательство. Пусть А – элемент пространства У, С – его контур, число t равно отношению площади S множества А к его периметру, C(-t) – внутренний контур t-окрестности контура С. Тогда площадь фигуры, ограниченной контурами C(-t) и С, меньше S, а потому существует точка множества А, которая в эту фигуру не попадает. Но тогда найдётся круг с центром в упомянутой точке, который содержится в А и радиус которого больше числа t, а потому среднегеометрический индекс множества А заведомо больше 1.

Пусть теперь А – выпуклый многоугольник, S – его площадь, P – периметр, r – максимальный радиус содержащегося в А круга. Соединив центр круга x_0 отрезками со всеми вершинами, получим разбиение многоугольника на конечное число таких треугольников с общей вершиной x_0, высоты которых не меньше числа r. Сумма площадей этих треугольников, равная S, будет не меньше ½ P r, причём равенство здесь достигается лишь тогда, когда высоты всех треугольников равны числу r. Следовательно, среднегеометрический индекс многоугольника не превосходит $\sqrt{2}$, причём равен $\sqrt{2}$ только для описанного многоугольника.

Поскольку каждый элемент пространства У можно с любой точностью относительно сетевого расстояния аппроксимировать многоугольниками, то из непрерывности в У среднегеометрического индекса (относительно сетевой топологии) следует, что его значение на этом элементе также не превосходит $\sqrt{2}$.

Наконец, любое число Т из полуинтервала $(1, \sqrt{2}]$ служит значением среднегеометрического индекса - например, на прямоугольнике со сторонами 1 и $(T^2 - 1)^{-1}$. Теорема 4 доказана.

Замечание 4. В семейство экстремальных элементов среднегеометрического индекса входят и компакты, отличные от многоугольников. Легко проверить принадлежность этому семейству выпуклого множества, ограниченного отрезками двух проведённых из одной внешней точки касательных к окружности и большой дугой, соединяющей точки касания. Ещё легче проверить, что в число экстремальных элементов входит круг.

Пусть теперь X_n – множество непустых компактов в n-мерном пространстве, представляющих собой замыкания односвязных областей с кусочно-гладкой поверхностью, $У_n$ – его подмножество, состоящее из компактов с дополнительным условием их выпуклости.

Определение 3. *Индексом поверхности и радиусным индексом* компакта A из X_n, который имеет n-мерный объём V, поверхность (n-1) – мерного объёма P и для которого максимальный радиус содержащегося в A n-мерного шара равен числу r, назовём соответственно величины $P\ V^{-1+1/n}$ и $r\ V^{-1/n}$, а *среднегеометрическим индексом* – среднее геометрическое двух предыдущих индексов, то есть величину $(P\ r\ V^{-1})^{1/2}$.

Теорема 5. *Множество значений среднегеометрического индекса на элементах из* Y_n *совпадает с полуинтервалом* $(1, \sqrt{n}]$, *причём для каждого выпуклого n-мерного многогранника его принадлежность к экстремальным элементам этого индекса равносильна существованию вписанной в него гиперсферы.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4, только на этот раз нужно рассматривать разбиение не на треугольники, а на n-мерные пирамиды.

Теперь рассмотрим бесконечномерное банахово пространство B, наделённое мерой M, заданной на системе борелевских множеств и не обращающейся в нуль на множествах с непустой внутренностью. В бесконечномерном пространстве отсутствует инвариантная мера Лебега, а в его компактах не могут содержаться шары положительного радиуса. Поэтому определение радиусного индекса теперь следует давать иначе.

Определение 4. *Радиусным индексом, порождённым мерой M,* борелевского множества A, имеющего непустую внутренность, и для которого максимальный радиус содержащегося в A шара равен числу r, назовём величину $r\ (M(A))^{-1}$.

Замечание 5. Если от меры M потребовать принадлежности введённому в работе [3] классу H-непрерывных мер (то есть таких, которые непрерывны относительно сдвигов на векторы подпространства H пространства B), то порождённый этой мерой радиусный индекс будет непрерывным по направлениям из H.

ССЫЛКИ

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. (1976). Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. – 544 с.

[2] Архангельский А.В. (1984). Симметрика. Математическая энциклопедия.4 ,1139-1140.

[3] Романов В.А. (1976). О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах. Доклады АН СССР. 227, № 3, 569-570.